DS n°8 : Polynômes, fractions rationnelles, équivalents

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées
Le soin et la clarté de la rédaction pourront faire varier la note de ±1 point. Il n'est pas attendu que vous arrivez au bout du sujet (le barème dépassera 100 points). Faites primer la qualité sur la quantité.

Exercice 1 : Fractions rationnelles

1) Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3}{(X+1)(X^2-2X-3)}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3+X+1}{X^4+2X^2+1}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 2 : Analyse asymptotique

1) Déterminer la limite de la suite $x_n = n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$.

2) Déterminer un équivalent simple de $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$.

3) Déterminer un équivalent simple de $v_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{n}\right)$.

4) Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent simple de $w_n = \dbinom{n+r}{r}$.

Problème : Polynômes divisibles par leur dérivée seconde

Le but du problème est d'étudier les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivée seconde. Les polynômes sont donc pris dans $\mathbb{C}[X]$.

Partie A : Étude de cas particuliers

1) Quels sont les polynômes de degré 2 divisibles par leur polynôme dérivée seconde ?

2) Montrer qu'un polynôme P de degré 3 est divisible par son polynôme dérivée seconde si et seulement si il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, avec $a \neq 0$, tels que : $P = a(X-c)^3 + b(X-c)$.

3) Soit P un polynôme de degré n ($n > 2$) divisible par son polynôme dérivée seconde. Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP''$.

a) Quel est le degré de Q ? Quel est son coefficient dominant ?

b) On suppose ici que Q admet une racine double, notée c. c est alors racine de P. Soit r son ordre de multiplicité dans P.
En écrivant $P = (X-c)^r R$, avec $R(c) \neq 0$, puis en calculant P'', montrer que $r = n$. Quelle est alors la forme du polynôme P ?

PARTIE B : Résolution d'un problème simplifié

Soit $n \geq 2$ un entier. On dira que $P \in \mathbb{C}[X]$ est solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$ s'il vérifie les trois conditions :

$$\begin{cases} (i) & \deg P = n \\ (ii) & P \text{ est unitaire} \\ (iii) & P = \dfrac{1}{n(n-1)}(X^2-1)P'' \end{cases}$$

Dans toute cette partie, P_n désigne un polynôme solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$ *(on supposera provisoirement qu'un tel polynôme existe).*

4) À partir de la relation (iii), et en utilisant la formule de Leibniz, démontrer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la relation :

$$(X^2-1)P_n^{(k+2)} + 2kXP_n^{(k+1)} = \left(n(n-1) - k(k-1)\right)P_n^{(k)}$$

5) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ (y compris $k = 0$), on pose $R_k = (X^2-1)^{k-1}P_n^{(k)}$, et, pour $k \neq n$, on pose $a_k = \dfrac{1}{n(n-1) - k(k-1)}$.

Déduire de la question précédente l'égalité $R_k = a_k R'_{k+1}$.

6) **a)** En déduire : $R_0 = a_0 a_1 \cdots a_{n-1} R_n^{(n)}$.

b) En déduire $P_n = \dfrac{(n-2)!}{(2n-2)!}(X^2-1)\left((X^2-1)^{n-1}\right)^{(n)}$.

On pourra remarquer que $n(n-1) - k(k-1) = (n-k)(n+k-1)$*).*

On peut montrer après beaucoup de calculs que P_n est effectivement solution de $(\mathcal{P}'_n)$. On pourra utiliser ce résultat sans le démontrer dans la partie suivante.

PARTIE C : Résolution du cas général

Soit $n \geq 2$ un entier. On dira que $P \in \mathbb{C}[X]$ est solution du problème $(\mathcal{P}_n)$ s'il vérifie les trois conditions :

$$\begin{cases} (i) & \text{il existe } Q \in \mathbb{C}[X] \text{ tel que } P = QP'' \\ (ii) & Q \text{ possède deux racines distinctes} \\ (iii) & \deg P = n \end{cases}$$

7) **a)** Si P est solution du problème $(\mathcal{P}_n)$, et si Q désigne le polynôme défini par (i), montrer qu'il existe deux nombres complexes a et b, avec $a \neq 0$, tels que : $Q(aX+b) = \dfrac{a^2}{n(n-1)}(X^2-1)$.

b) Montrer que, alors, le polynôme $R = P(aX+b)$ vérifie la relation : $R = \dfrac{1}{n(n-1)}(X^2-1)R''$.

8) Résoudre complètement le problème $(\mathcal{P}_n)$ à partir de la solution du problème $(\mathcal{P}'_n)$ trouvée à la question **6)**.

9) Conclure : Quels sont tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivée seconde ?

Monsieur et Madame "De $1 = 0$" ont une fille. Comment peut-elle bien s'appeler ? Réponse : Hélène.